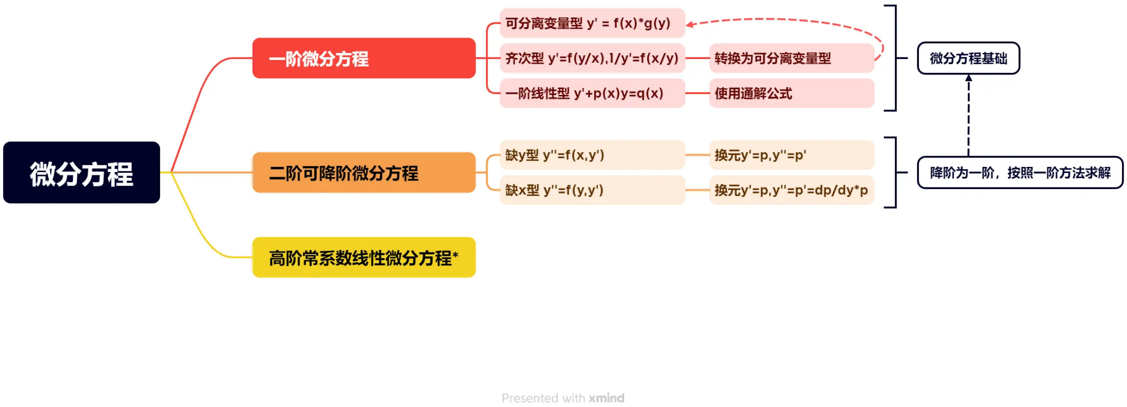
微分方程框架



一阶微分方程

可分离变量型

形如：$\mathrm{y}' = f(x)\cdot g(y)$，有：

$$\mathrm{y}' = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow f(x) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

进一步的，可通过换元得到以上形式的，也可以对其分离变量，如：

$$\mathrm{y}' = f(ax+by+c) \Rightarrow u{=}ax+by+c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(u) \Rightarrow \frac{du}{dx} = a+bf(u) \Rightarrow \frac{du}{a+bf(u)} = dx \Rightarrow \int \frac{du}{a+bf(u)} = \int dx$$

齐次型

形如$y' = f(\frac{y}{x})$或$\frac{1}{y'} = f(\frac{x}{y})$，按照上述方法换元转换为分离变量型，以$y' = f(\frac{y}{x})$为例，令$u = \frac{y}{x}$，有：

$$y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = f(u) = x\frac{du}{dx} + u \Rightarrow \int \frac{1}{f(u)-u}du = \int \frac{dx}{x}$$

一阶线性型

形如：$y' + p(x)y = q(x)$，使用以下公式计算（由于是应试，推导步骤略）：

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx + C\right]$$

上式为一阶线性微分方程的通解公式，其中，式中的$\int p(x)dx$为$p(x)$的某一个原函数。

注：上述公式中若$\int p(x)dx = \ln|\varphi(y)|$，该绝对值在上述公式中最后可以去掉，产生的$\pm$可以合并到常数$C$中得到常数$D$。

二阶微分方程（可降阶）

形如：$y'' = f(x, y')$，即缺y型，令$y' = p, y'' = p'$，有：

$$y'' = \frac{dp}{dx} = f(x, y') = f(x, p)$$

由上式降阶为一阶微分方程，按一阶微分方程方法求解得到$p = y' = \varphi(x, C_1)$，则可求得原微分方程通解：

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$$

形如：$y'' = f(y, y')$，即缺x型，令$y' = p, y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p$，有：

$$y'' = \frac{dp}{dy}\cdot p = f(y, p)$$

由上式降阶为一阶微分方程，按一阶微分方程方法求解得到$p = y' = \varphi(y, C_1)$，分离变量后积分即可求得原微分方程的通解：

$\frac{dy}{\varphi(y,C_1)} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y,C_1)} = \int dx = x + C_2$

高阶常系数线性微分方程*

对于形式为： $y'' + py' + qy = f(x)$，$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$**求解步骤如下：**

1. 写出方程$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，解出$\lambda_1, \lambda_2$或共轭复根；
2. 根据以下类型，写出齐次线性微分方程的**通解**：

   $$y = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, & p^2 - 4q > 0(root : \lambda_1 \neq \lambda_2) \\ (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}, & p^2 - 4q = 0(root : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda) \\ e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), & p^2 - 4q < 0(root : \alpha \pm \beta i) \end{cases}$$

3. 对于第一种形式，直接根据自由项$f(x)$的形式设**特解**，对于第二种形式需分别根据自由项$f_1(x), f_2(x)$的形式设两个特解，然后相加得到微分方程的特解，特解形式如下：

   $$y^* = \begin{cases} e^{\alpha x} Q_n(x) x^k, & f(x) = P_n(x) e^{\alpha x} \\ e^{\alpha x} \left[Q_l^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_l^{(2)}(x) \sin \beta x \right] x^k, & f(x) = e^{\alpha x} \left[P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x \right] \end{cases}$$

   上式中的$e^{\alpha x}$直接从自由项中照抄，Q_n为x的n次一般多项式，$l = max\{m, n\}$，$Q_l^{(1)}, Q_l^{(2)}$分别为x的两个不同的l次一般多项式。

   k在$p^2 - 4q \geq 0$时：α与所有特征根都不相等，此时$k = 0$；与其中一个特征根相等，$k = 1$；与所有特征根相等，$k = 2$。

   k在$p^2 - 4q < 0$时：$\alpha \pm \beta i$不是特征根，此时$k = 0$；$\alpha \pm \beta i$是特征根，$k = 1$。

最后，将**齐次微分方程的通解加上该微分方程的一个特解**即是非齐次微分方程的通解，简单来说就是先写齐次通解再设非齐次特解，相加得非齐次通解。

对于$y^{(n)}(n \geq 3)$**的情形：**

形如$y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0$，同样的写出特征方程：$\lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3 = 0$，解得$\lambda_{1,2,3}$，然后根据以下不同情况直接写出通解：

1. 若λ_i为单实根：$Ce^{\lambda x}$；
2. 若λ_i为k重实根：$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_k x^{k-1})e^{\lambda x}$；
3. 若λ_i为单复根$\alpha \pm \beta i$：$e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$。

将上述每一个特征根产生的项相加，得到y的齐次通解。